Exercice 2 — 5 points

1. $\binom{14}{2} \times \binom{10}{2} = 4\,095 \neq 272$.
L'énoncé indique « est-il possible » et ne fait pas intervenir le nombre maximum de groupes composés de deux filles et deux garçons. Comme $272 < 4\,095$, **l'affirmation est vraie.**

2. f est dérivable comme composée de fonctions dérivables.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 6 \times \cos(2x+\pi)$
$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 6 \times \cos\left(2 \times \dfrac{\pi}{2} + \pi\right) = 6$
$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3 \times \sin\left(2 \times \dfrac{\pi}{2} + \pi\right) = 0$
L'équation de la tangente au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ est donnée par :
$y = \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \times f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$y = 6x - 6 \times \dfrac{\pi}{2}$
$y = 6x - 3\pi$
L'affirmation est vraie.

3. $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[,\ F'(x) = \dfrac{2x\ln x + 2x + 1}{x}$, en particulier $F'(1) = \dfrac{3}{2}$ et $f(1) = 2$. f n'est pas la dérivée de F. Ainsi on montre que F n'est pas une primitive de f.
L'affirmation est fausse.

4. $g(0) = 45 \times \mathrm{e}^0 + 20 = 65$
$\forall t \in \mathbb{R} \quad g'(t) + 0{,}06 \times g(t) = 45 \times 0{,}06 \times \mathrm{e}^{0{,}06t} + 0{,}06 \times \left(45 \times \mathrm{e}^{0{,}06t} + 20\right) = 5{,}4 \times \mathrm{e}^{0{,}06t} + 1{,}2$
g n'est pas solution de (E).
L'affirmation est fausse.

5. Soit y une solution positive de (E_2) on peut écrire $\forall x \in \mathbb{R} \quad y'(x) = y(x) + 3\mathrm{e}^{0{,}4x}$, comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) \geqslant 0$ et $3\mathrm{e}^{0{,}4x} \geqslant 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad y'(x) \geqslant 0$.
On dérive l'équation différentielle :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad y''(x) = y'(x) + 1{,}2\mathrm{e}^{0{,}4x}$. Comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad y'(x) \geqslant 0$ et $1{,}2\mathrm{e}^{0{,}4x} \geqslant 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad y''(x) \geqslant 0$.
$\forall x \in \mathbb{R} \quad y''(x) \geqslant 0$ donc y est convexe sur $\mathbb{R}$.
L'affirmation est vraie : les solutions positives de (E_2) sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.